



Робоча програма дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі»

СПЕЦІАЛЬНІСТЬ 123 · КОМП'ЮТЕРНА ІНЖЕНЕРІЯ

БАКАЛАВР

120

Годин

Загальний обсяг дисципліни

4

Кредити ЄКТС

Відповідно до стандарту

4

Модулi

Змістовних блоки курсу

Загальна інформація про дисципліну

Ідентифікація

Назва: Оптимізаційні методи і моделі

Спеціальність: 123 Комп'ютерна інженерія

Освітні програми: Фінанси, банківська справа та страхування в управлінських інформаційних системах і технологіях; Облік і оподаткування в управлінських інформаційних системах і технологіях

Ступінь: Бакалавр

Обсяг: 120 годин / 4 кредити ЄКТС

Модулів: 4 змістовних блоки

Підсумковий контроль: Іспит

Призначення дисципліни

Дисципліна «Оптимізаційні методи і моделі» формує у студентів системне розуміння математичного апарату оптимізації та вміння застосовувати оптимізаційні методи для розв'язання прикладних задач у сфері комп'ютерної інженерії, управлінських інформаційних систем, фінансів та обліку.

Курс охоплює теоретичні основи лінійного та нелінійного програмування, мережеві та динамічні моделі, стохастичні методи, а також сучасні евристичні підходи до оптимізації. Дисципліна є базовою для підготовки бакалаврів зі спеціальності «Комп'ютерна інженерія» та забезпечує формування необхідних загальних і фахових компетентностей у межах обох освітніх програм.

Загальні компетентності

Аналітичне мислення

Здатність до аналізу, синтезу та критичного оцінювання інформації в контексті математичного моделювання та оптимізації: виявлення суттєвих даних, побудова моделей, порівняння альтернативних рішень та формування обґрунтованих висновків.

Самоорганізація

Уміння самостійно навчатися, планувати роботу та організовувати виконання розрахункових і аналітичних завдань у визначені строки, зокрема під час підготовки індивідуальних та групових проектів з оптимізації.

Комунікація

Здатність до усної та письмової фахової комунікації: чітко пояснювати математичні поняття та алгоритми, аргументовано представляти результати розв'язання оптимізаційних задач, оформлювати звіти та аналітичні записки.

Командна робота

Відповідальність, ініціативність та готовність працювати в команді під час виконання групових проектів з моделювання та оптимізації управлінських і фінансових процесів у інформаційних системах.

Студент повинен вміти: аналізувати умови задач оптимізації та формалізувати їх у вигляді математичних моделей; виділяти головне та узагальнювати результати; планувати власну діяльність і дотримуватися дедлайнів; коректно спілкуватися з викладачами та одногрупниками; брати участь у командній роботі над прикладними оптимізаційними проектами.

Фахові компетентності

Математичне моделювання

Здатність формалізувати прикладні задачі управління та прийняття рішень у вигляді математичних оптимізаційних моделей. Знання класифікації задач оптимізації, структури математичних програм та умов коректності постановки задач.

Застосування методів оптимізації

Здатність застосовувати методи лінійного, нелінійного, цілочислового та динамічного програмування до розв'язання практичних задач у сфері фінансів, обліку, управління ресурсами та інформаційних систем.

Комп'ютерна реалізація

Знання сучасних програмних інструментів для розв'язання задач оптимізації (Excel Solver, Python-бібліотеки, MATLAB). Уміння інтерпретувати результати обчислень та перевіряти оптимальність отриманих рішень.

Студент повинен вміти: будувати математичні моделі оптимізаційних задач; застосовувати симплекс-метод та його модифікації; розв'язувати транспортні та мережеві задачі; застосовувати принцип оптимальності Беллмана; використовувати програмні засоби для чисельного розв'язання задач оптимізації; інтерпретувати результати та аналізувати чутливість оптимального рішення.

Результати навчання

→ Побудова математичних моделей

Формалізувати прикладні задачі управління, фінансового планування та розподілу ресурсів у вигляді задач математичного програмування; визначати вид задачі та вибирати відповідний метод розв'язання.

→ Мережеві та динамічні моделі

Розв'язувати транспортні задачі, задачі про найкоротший шлях, задачі призначення та задачі динамічного програмування із застосуванням принципу оптимальності Беллмана.

→ Застосування аналітичних методів

Застосовувати симплекс-метод, двофазний симплекс-метод, метод штучного базису, методи розгалуження та відсікань до розв'язання задач лінійного та цілочислового програмування.

→ Комп'ютерна реалізація та аналіз

Використовувати сучасне програмне забезпечення для розв'язання оптимізаційних задач, проводити аналіз чутливості оптимального рішення та інтерпретувати результати у прикладному контексті управлінських інформаційних систем.

Основи оптимізації та лінійне програмування

Тема 1.1

Вступ до теорії оптимізації. Постановка задач математичного програмування, класифікація оптимізаційних задач, умови оптимальності та геометрична інтерпретація.

Тема 1.2

Лінійне програмування. Симплекс-метод: загальна постановка задачі ЛП, стандартна та канонічна форми, геометричний і аналітичний методи розв'язання.

Тема 1.3

Двоїстість у лінійному програмуванні. Двоїста задача, теореми двоїстості, економічна інтерпретація двоїстих оцінок. Аналіз чутливості оптимального розв'язку.

Тема 1.1 — Лекційний матеріал

Вступ до теорії оптимізації та постановка задач

Лекція 1–2 (4 год.): Предмет і завдання курсу. Поняття оптимізації та оптимального рішення. Загальна структура задачі оптимізації: цільова функція, змінні рішення, обмеження.

Класифікація задач математичного програмування: за кількістю змінних, видом цільової функції та обмежень (лінійні/нелінійні, одновимірні/багатовимірні, дискретні/неперервні).

Умови оптимальності: необхідні та достатні умови. Поняття опуклості та опуклих множин. Локальний та глобальний оптимум. Геометрична інтерпретація задач оптимізації на площині. Зв'язок оптимізаційних методів з управлінськими рішеннями в ІС.

Ключові питання лекції

- Поняття математичного програмування та його місце серед методів ОДП
- Структура загальної задачі оптимізації: цільова функція та обмеження
- Класифікація задач за видом функцій та областю допустимих рішень
- Поняття опуклої задачі та умови глобального оптимуму
- Приклади прикладних задач оптимізації у фінансах та управлінні
- Огляд програмних засобів: Excel Solver, Python (scipy.optimize, PuLP), MATLAB

Тема 1.1 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Завдання 1. Постановка та класифікація задач оптимізації: визначення виду задачі за умовою, запис цільової функції та системи обмежень у стандартній формі (5 варіантів).

Завдання 2. Геометричний метод розв'язання задачі лінійного програмування з двома змінними: побудова допустимої множини, визначення оптимальної вершини.

Завдання 3. Введення у Excel Solver: розв'язання простої задачі оптимізації розподілу ресурсів. Інтерпретація результатів.

Самостійна робота (6 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С., Григорків М. В., Ярошенко О. І. «Оптимізаційні методи та моделі» — вступний розділ та розділ «Постановка задач»
- Складання конспекту класифікації задач математичного програмування зі схемою
- Підготовка прикладів з реальних задач фінансового управління, що формалізуються як задачі оптимізації
- Ознайомлення з документацією Excel Solver та Python PuLP (онлайн-ресурси)

Очікуваний результат: студент вміє формалізувати прикладну задачу у вигляді задачі математичного програмування та класифікувати її за відповідними ознаками.

Тема 1.2 — Лекційний матеріал

Лінійне програмування та симплекс-метод

Лекція 3–4 (4 год.): Задача лінійного програмування (ЛП): загальна, стандартна та канонічна форми. Властивості опуклого многогранника допустимих розв'язків. Поняття базисного допустимого розв'язку. Симплекс-метод: симплекс-таблиця, вибір вхідної та вихідної змінної, критерій оптимальності, ітераційний процес.

Двофазний симплекс-метод та метод великого М: застосування при штучних базисних змінних. Виродженість та циклінг. Задачі максимізації та мінімізації. Особливі випадки: нескінченне оптимальне рішення, недопустима задача, необмежене рішення.

Ключові питання лекції

- Загальна, стандартна та канонічна форми задачі ЛП
- Геометрична інтерпретація: опуклий многогранник і вершини
- Базисний допустимий розв'язок та умови оптимальності
- Алгоритм симплекс-методу: кроки та симплекс-таблиця
- Двофазний метод та метод великого М
- Аналіз особливих випадків у симплекс-методі

Ключові формули

- Задача ЛП: $\max(\min) \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, за умови $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
- Критерій оптимальності: всі $z_j - c_j \geq 0$ (для задачі максимізації)

Тема 1.2 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Розв'язання задачі ЛП симплекс-методом вручну (3 змінні, 4 обмеження): побудова початкового базису, заповнення симплекс-таблиці, виконання ітерацій до оптимального розв'язку.

Задача 2. Розв'язання задачі ЛП двофазним методом: задача з обмеженнями типу « $\geq$ » та « $=$ ». Перевірка результату за допомогою Excel Solver.

Задача 3. Аналіз особливих випадків: розпізнавання недопустимої та необмеженої задачі за симплекс-таблицею.

Самостійна робота (6 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С., Григорків М. В., Ярошенко О. І. «Оптимізаційні методи та моделі», 2-ге вид. — розділ «Лінійне програмування»
- Самостійне розв'язання 5 задач ЛП симплекс-методом із перевіркою в Excel Solver
- Підготовка схеми алгоритму симплекс-методу
- Моделювання задачі оптимального розподілу бюджету фінансового відділу як задачі ЛП

Очікуваний результат: студент вміє застосовувати симплекс-метод до розв'язання задач лінійного програмування, розпізнавати особливі випадки та перевіряти результати програмними засобами.

Тема 1.3 — Лекційний матеріал

Двоїстість у лінійному програмуванні та аналіз чутливості

Лекція 5 (2 год.): Поняття двоїстої задачі. Правила побудови двоїстої задачі. Основні теореми двоїстості: теорема слабкої двоїстості, теорема сильної двоїстості, теорема про доповнюючу нежорсткість. Економічна інтерпретація двоїстих оцінок (тіньові ціни ресурсів).

Аналіз чутливості: вплив зміни правих частин обмежень та коефіцієнтів цільової функції на оптимальний розв'язок. Діапазони допустимих змін (ranging). Практичне застосування аналізу чутливості для прийняття управлінських рішень у фінансових та облікових системах.

Ключові питання лекції

- Правила побудови двоїстої задачі до задачі ЛП
- Теорема сильної двоїстості та її наслідки
- Тіньові ціни ресурсів: економічна інтерпретація
- Аналіз чутливості за правими частинами обмежень
- Аналіз чутливості за коефіцієнтами цільової функції
- Використання звіту чутливості в Excel Solver для управлінських рішень

Тема 1.3 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Завдання 1. Побудова двоїстої задачі до заданої прямої задачі ЛП. Розв'язання пари взаємно двоїстих задач та перевірка теорем двоїстості.

Завдання 2. Економічна інтерпретація двоїстих оцінок: визначення тіньових цін ресурсів та меж їх стабільності для умовного підприємства з управлінської ІС.

Завдання 3. Аналіз чутливості в Excel Solver: формування звіту чутливості, інтерпретація допустимих діапазонів змін коефіцієнтів та правих частин.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі» — розділ «Двоїсті задачі лінійного програмування»
- Розв'язання 4 задач на побудову та розв'язання двоїстих задач
- Підготовка аналітичної записки: «Застосування тіньових цін для оптимізації розподілу ресурсів у фінансовому відділі»
- Ознайомлення зі звітом чутливості Excel Solver та його інтерпретацією (онлайн-тutorіал)

Очікуваний результат: студент вміє будувати двоїсту задачу, інтерпретувати двоїсті оцінки як тіньові ціни та проводити аналіз чутливості оптимального розв'язку.

Транспортні задачі та цілочислове програмування

Тема 2.1

Транспортна задача: постановка, методи знаходження початкового плану (метод північно-західного кута, метод мінімального елемента, метод Фогеля) та метод потенціалів для оптимізації.

Тема 2.2

Задача призначення та мережеві моделі. Угорський алгоритм, задача про найкоротший шлях (алгоритм Дейкстри), задача максимального потоку та задача про мінімальне остове дерево.

Тема 2.3

Цілочислове лінійне програмування (ЦЛП). Методи розгалуження та відсікань (метод «гілок та меж», метод відсікань Гоморі). Задачі булевого програмування та їх застосування.

Тема 2.4

Прикладні задачі цілочислового та комбінаторного програмування: задача про рюкзак, задача розкрою, задача комівояжера. Евристичні підходи до NP-важких задач.

Тема 2.1 — Лекційний матеріал

Транспортна задача

Лекція 6–7 (4 год.): Транспортна задача (ТЗ): постановка (збалансована та незбалансована), математична модель. Методи знаходження початкового допустимого плану: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента, метод Фогеля. Порівняння ефективності методів.

Метод потенціалів: умови оптимальності (критерій оптимальності для ТЗ), побудова потенціалів постачальників та споживачів, виявлення поліпшуючої клітинки, перерозподіл постачань за циклом. Виродженість у ТЗ та способи усунення.

Ключові питання лекції

- Постановка транспортної задачі: матриця витрат, обсяги постачань і попиту
- Умова збалансованості та метод приведення до збалансованої форми
- Метод північно-західного кута: алгоритм і недоліки
- Метод мінімального елемента та метод Фогеля
- Метод потенціалів: критерій оптимальності та ітерація
- Застосування ТЗ у логістиці та управлінні ланцюгами постачання

Ключові формули

- Задача ТЗ: $\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$, при $\sum_j x_{ij} = a_i$, $\sum_i x_{ij} = b_j$
- Критерій оптимальності: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ для всіх вільних клітинок

Тема 2.1 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Розв'язання збалансованої ТЗ методом Фогеля (початковий план) та методом потенціалів (оптимізація) вручну. Порівняння початкової вартості з оптимальною.

Задача 2. Розв'язання незбалансованої ТЗ: приведення до збалансованої форми, знаходження оптимального плану. Економічна інтерпретація результатів.

Задача 3. Розв'язання ТЗ засобами Excel Solver. Порівняння ручного та комп'ютерного розв'язку.

Самостійна робота (6 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі» — розділ «Транспортні задачі»
- Виконання розрахункового завдання: самостійне розв'язання З ТЗ різними методами
- Підготовка порівняльної таблиці «Методи знаходження початкового плану ТЗ: переваги та недоліки»
- Моделювання задачі розподілу фінансових потоків між банківськими філіями як ТЗ

Очікуваний результат: студент вміє розв'язувати транспортні задачі методом потенціалів, застосовувати різні методи початкового планування та інтерпретувати результати.

Тема 2.2 — Лекційний матеріал

Задача призначення та мережеві моделі

Лекція 8 (2 год.): Задача призначення як окремий випадок ТЗ.

Угорський алгоритм (метод Мункреса): редукція матриці витрат, побудова незалежного нульового покриття, оптимальне призначення. Узагальнення задачі призначення.

Мережеві моделі: граф, мережа, потік. Задача про найкоротший шлях (алгоритм Дейкстри, алгоритм Беллмана-Форда). Задача максимального потоку (алгоритм Форда-Фалкерсона). Задача про мінімальне остове дерево (алгоритм Прима, алгоритм Краскала). Застосування в мережах передачі даних та фінансових мережах.

Ключові питання лекції

- Задача призначення: постановка та математична модель
- Угорський алгоритм: кроки та приклад
- Основні типи мережевих задач оптимізації
- Алгоритм Дейкстри для найкоротшого шляху
- Алгоритм Форда-Фалкерсона для максимального потоку
- Застосування мережевих моделей в інформаційних системах управління

Тема 2.2 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Завдання 1. Розв'язання задачі призначення угорським алгоритмом: оптимальний розподіл виконавців за завданнями (задача мінімізації витрат).

Завдання 2. Застосування алгоритму Дейкстри: знаходження найкоротшого шляху в мережі передачі даних (граф із 8–10 вузлів).

Завдання 3. Задача максимального потоку в мережі: застосування алгоритму Форда-Фалкерсона. Інтерпретація результату для задачі управління інформаційними потоками.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі», 2-ге вид. — розділ «Мережеві моделі»
- Підготовка реферату: «Застосування мережевих моделей в управлінських інформаційних системах»
- Самостійне розв'язання задач на найкоротший шлях і мінімальне остове дерево (3 задачі)
- Реалізація алгоритму Дейкстри на Python (networkx або вручну)

Очікуваний результат: студент вміє розв'язувати задачу призначення та основні мережеві задачі оптимізації, застосовуючи відповідні алгоритми.

Тема 2.3 — Лекційний матеріал

Цілочислове лінійне програмування

Лекція 9–10 (4 год.): Цілочислове лінійне програмування (ЦЛП): постановка задачі, відмінність від задачі ЛП. Геометрична інтерпретація. Метод відсікань Гоморі: побудова відсікань Гоморі, додавання обмежень, алгоритм. Метод «гілок та меж» (Branch and Bound): дерево розгалуження, стратегії вибору вузла, нижні та верхні межі.

Булеве програмування: задачі з бінарними змінними (0/1). Постановка задач: покриття множини, задача про ранець (кнапзак). Застосування у задачах бінарного вибору інвестиційних проектів та формування портфелів активів.

Ключові питання лекції

- Відмінність ЦЛП від задачі ЛП: чому не можна просто заокруглити?
- Метод Гоморі: побудова правильних відсікань
- Алгоритм «гілок та меж»: структура та ефективність
- Задачі булевого програмування: типи та застосування
- Задача про ранець: постановка та методи розв'язання
- Застосування ЦЛП до задач відбору та планування в ІС

Тема 2.3 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Розв'язання задачі ЦЛП методом «гілок та меж»: побудова дерева розгалуження, визначення нижніх меж, знаходження оптимального цілочислового розв'язку.

Задача 2. Розв'язання задачі про ранець (булеве програмування): відбір інвестиційних проектів з обмеженим бюджетом для максимізації NPV.

Задача 3. Розв'язання задачі ЦЛП засобами Excel Solver (з опцією цілочисловості). Порівняння результатів ЛП-релаксації та ЦЛП.

Самостійна робота (6 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі» — розділ «Задачі цілочислового лінійного програмування»
- Виконання розрахункового завдання: розв'язання 3 задач ЦЛП методом «гілок та меж»
- Підготовка есе: «Застосування цілочислового програмування у задачах фінансового планування та формування інвестиційного портфеля»
- Реалізація задачі про ранець засобами Python (PuLP або scipy)

Очікуваний результат: студент вміє розв'язувати задачі цілочислового та булевого програмування методом «гілок та меж» і методом Гоморі, застосовувати їх до прикладних задач вибору та планування.

Тема 2.4 — Лекційний матеріал

Прикладні задачі комбінаторної оптимізації

Лекція 11 (2 год.): Поняття комбінаторної оптимізації. NP-важкі задачі: задача комівояжера (TSP), задача розкрою, задача складання розкладу. Точні та наближені методи. Жадібні алгоритми. Локальний пошук. Метаевристики: генетичні алгоритми (основні оператори: селекція, кросинговер, мутація), алгоритм імітації відпалу — огляд принципів.

Застосування у ІС

Задача комівояжера у логістиці та маршрутизації. Задача розкладу у плануванні завдань ІС. Задача розкрою у виробничому плануванні. Оптимізація запитів у базах даних як задача комбінаторної оптимізації.

- Задача TSP: точні методи (для $n \leq 15$) та евристики (для великих n)
- Генетичні алгоритми: схема роботи та параметри
- Алгоритм імітації відпалу: аналогія з фізичним процесом
- Огляд бібліотек Python для метаевристик: DEAP, pyswarms

Тема 2.4 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Завдання 1. Розв'язання задачі комівояжера ($n = 6-8$ міст) методом повного перебору та жадібним алгоритмом. Порівняння якості розв'язків.

Завдання 2. Реалізація простого генетичного алгоритму для задачі оптимізації на Python (або Excel VBA): кодування рішення, оператори відтворення.

Завдання 3. Кейс: оптимізація маршруту обслуговування банківських відділень або аудиторських перевірок як задача TSP.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання матеріалів лекції та рекомендованих онлайн-ресурсів з метаевристичної оптимізації
- Підготовка реферату: «Генетичні алгоритми та алгоритм імітації відпалу: принципи та застосування в ІС» (3–4 сторінки)
- Ознайомлення з бібліотекою DEAP для Python: приклад застосування до задачі оптимізації
- Розв'язання 2 задач на жадібні алгоритми та локальний пошук

Очікуваний результат: студент розуміє природу NP-важких задач комбінаторної оптимізації та вміє застосовувати евристичні й метаевристичні підходи до їх розв'язання.

Нелінійне та динамічне програмування

Тема 3.1

Нелінійне програмування. Умови оптимальності першого та другого порядку. Безумовна оптимізація: методи градієнтного спуску, Ньютона та квазі-ньютонівські методи.

Тема 3.2

Нелінійна умовна оптимізація. Умови Куна-Таккера. Метод множників Лагранжа. Опукле та квадратичне програмування. Задачі оптимізації портфеля (модель Марковіца).

Тема 3.3

Динамічне програмування. Принцип оптимальності Беллмана. Задачі розподілу ресурсів, задачі управління запасами та задачі на графах методом динамічного програмування.

Тема 3.4

Стохастичне програмування та задачі оптимізації в умовах невизначеності. Задачі теорії ігор: матричні ігри, сідлова точка, змішані стратегії.

Тема 3.1 — Лекційний матеріал

Нелінійне програмування: безумовна оптимізація

Лекція 12–13 (4 год.): Нелінійне програмування (НЛП):

постановка задачі, відмінності від ЛП. Безумовна оптимізація: необхідні та достатні умови екстремуму функції багатьох змінних (градієнт, гессіан). Методи нульового порядку: метод перебору. Методи першого порядку: метод градієнтного спуску (steepest descent), метод спряжених градієнтів. Методи другого порядку: метод Ньютона, квазі-ньютонівський метод BFGS.

Ключові питання лекції

- Умови локального мінімуму: необхідна умова ($\nabla f = 0$) та достатня ($H > 0$)
- Метод градієнтного спуску: алгоритм та вибір кроку
- Метод Ньютона: квадратична збіжність та обчислення гессіана
- BFGS: квазі-ньютонівська апроксимація гессіана
- Порівняння методів за швидкістю збіжності та обчислювальними витратами
- Реалізація в Python: `scipy.optimize.minimize`

Ключові формули

- Необхідна умова: $\nabla f(x^*) = 0$
- Достатня умова: матриця Гессе $H(x^*) > 0$ (позитивно визначена)
- Ітерація градієнтного спуску: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})$

Тема 3.1 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Знаходження екстремумів функцій двох змінних аналітичним методом: обчислення градієнта, гессіана, класифікація стаціонарних точок.

Задача 2. Реалізація методу градієнтного спуску для мінімізації квадратичної функції на Python: 3–5 ітерацій вручну та комп'ютерна перевірка через `scipy.optimize.minimize`.

Задача 3. Прикладна задача: мінімізація функції витрат підприємства (квадратична форма) методом BFGS у Python. Аналіз збіжності.

Самостійна робота (6 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі», 2-ге вид. — розділ «Нелінійні оптимізаційні моделі»
- Виконання розрахункового завдання: знаходження безумовного екстремуму 4 функцій аналітичним методом
- Підготовка огляду: «Методи безумовної оптимізації та їх реалізація засобами Python `scipy`»
- Опрацювання онлайн-курсу або відеолекції з теми «Gradient Descent» (Coursera / YouTube)

Очікуваний результат: студент вміє застосовувати необхідні та достатні умови екстремуму функцій багатьох змінних, реалізовувати метод градієнтного спуску та використовувати `scipy.optimize` для числової оптимізації.

Тема 3.2 — Лекційний матеріал

Нелінійна умовна оптимізація та задачі портфельного аналізу

Лекція 14 (2 год.): Умовна оптимізація: постановка задачі з рівняннями та нерівностями-обмеженнями. Метод множників Лагранжа для задач з обмеженнями у формі рівностей: умова Лагранжа, побудова функції Лагранжа. Умови Куна-Таккера для задач з нерівностями: регулярність, умови першого порядку ККТ.

Опукле та квадратичне програмування: постановка задач, властивості, методи розв'язання (метод активних обмежень). Задача оптимізації інвестиційного портфеля Марковіца: мінімізація дисперсії портфеля при заданій дохідності.

Ключові питання лекції

- Метод множників Лагранжа: умова та геометрична інтерпретація
- Умови ККТ: необхідні та (для опуклих задач) достатні
- Квадратична задача оптимізації: постановка та методи
- Модель Марковіца: математична постановка
- Ефективна межа портфеля та її побудова
- Реалізація задачі Марковіца на Python (cvxpy, scipy)

Ключові формули

- Лагранжیان: $L(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x)$
- Умова стаціонарності: $\nabla_x L = 0, g_i(x) = 0$
- Дисперсія портфеля: $\sigma^2 = w^T \Sigma w$, де Σ — матриця коваріацій

Тема 3.2 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Розв'язання задачі умовної оптимізації методом множників Лагранжа: знаходження умовного екстремуму функції при одному та двох обмеженнях у формі рівностей.

Задача 2. Перевірка умов ККТ для заданої задачі нелінійного програмування з нерівностями. Визначення активних обмежень.

Задача 3. Прикладна задача Марковіца: оптимізація портфеля з 3–4 активів на Python (cvxpy або Excel Solver). Побудова точки ефективної межі при заданій цільовій дохідності.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі», 2-ге вид. — розділи «Опукле та квадратичне програмування»
- Розв'язання 4 задач на метод множників Лагранжа та умови ККТ
- Підготовка аналітичної записки: «Модель Марковіца як інструмент оптимізації інвестиційного портфеля: теорія та практика застосування»
- Ознайомлення з бібліотекою cvxpy для розв'язання задач опуклої оптимізації

Очікуваний результат: студент вміє застосовувати метод множників Лагранжа та умови ККТ, розв'язувати задачі квадратичного програмування та використовувати модель Марковіца для портфельної оптимізації.

Тема 3.3 — Лекційний матеріал

Динамічне програмування

Лекція 15 (2 год.): Динамічне програмування (ДП): ідея методу, відмінність від «жадібних» підходів. Принцип оптимальності Беллмана: формулювання та геометрична інтерпретація. Рівняння Беллмана. Задачі з дискретним часом: прямий та зворотній хід.

Класичні задачі ДП: задача розподілу ресурсів між об'єктами; задача про заміну обладнання; задача управління запасами; задача знаходження найкоротшого шляху на орієнтованому ациклічному графі методом ДП. Порівняння ДП з методами ЛП і ЦЛП.

Ключові питання лекції

- Принцип оптимальності Беллмана: формулювання та умови застосовності
- Рівняння Беллмана: запис для задач максимізації та мінімізації
- Алгоритм зворотного ходу: таблиця умовних оптимумів
- Задача розподілу ресурсів: постановка та рекурентне рівняння
- Задача управління запасами: ДП-формуляція
- Переваги ДП: розбиття задачі на підзадачі, ефективність при великій кількості кроків

Тема 3.3 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Розподіл обмежених ресурсів (інвестицій) між трьома об'єктами методом ДП: побудова таблиці умовних оптимумів, зворотній хід, визначення оптимального плану розподілу.

Задача 2. Задача про найкоротший шлях на орієнтованому графі методом ДП: поетапне обчислення функцій Беллмана, відновлення оптимального маршруту.

Задача 3. Реалізація задачі розподілу ресурсів на Python з використанням рекурсії та мемоізації. Порівняння з повним перебором.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі», 2-ге вид. — розділ «Динамічне програмування»
- Виконання розрахункового завдання: розв'язання 3 задач ДП (розподіл ресурсів, заміна обладнання, управління запасами)
- Підготовка таблиці «Порівняння методів ЛП, ЦЛП та ДП за областями застосування»
- Моделювання задачі оптимального розподілу ІТ-бюджету між проектами методом ДП

Очікуваний результат: студент вміє застосовувати принцип оптимальності Беллмана та алгоритм динамічного програмування для розв'язання задач розподілу ресурсів і управління запасами.

Тема 3.4 — Лекційний матеріал

Стохастичне програмування та елементи теорії ігор

Лекція 16 (2 год.): Оптимізація в умовах невизначеності.

Стохастичне програмування: задачі з випадковими параметрами, математичне сподівання як цільова функція, обмеження типу «з імовірністю не менше p » (chance constraints). Двоетапні задачі стохастичного програмування.

Теорія ігор: матричні ігри двох осіб із нульовою сумою. Поняття стратегії, платіжна матриця, принцип мінімаксу. Сідлова точка та стратегії в чистому вигляді. Змішані стратегії: теорема Мінімакс Неймана. Зв'язок матричних ігор із задачами ЛП.

Ключові питання лекції

- Відмінність детермінованих та стохастичних задач оптимізації
- Задача стохастичного програмування: $E[f(x, \xi)] \rightarrow \min$
- Матрична гра: платіжна матриця, нижня та верхня ціна гри
- Принцип мінімаксу та умови існування сідлової точки
- Змішані стратегії та теорема Неймана
- Зведення матричної гри до задачі ЛП

Ключові формули

- Нижня ціна гри: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$
- Верхня ціна гри: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$
- Сідлова точка: $\alpha = \beta = v$ (ціна гри)

Тема 3.4 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Розв'язання матричної гри: знаходження сідлової точки в чистих стратегіях (якщо існує), визначення ціни гри та оптимальних стратегій.

Задача 2. Знаходження оптимальних змішаних стратегій для гри 2×2 аналітичним методом та зведення до задачі ЛП. Перевірка в Excel Solver.

Задача 3. Кейс: задача прийняття рішення в умовах невизначеності (конкурентне ринкове середовище) — вибір оптимальної стратегії розвитку ІС за критеріями Вальда, Гурвіца, Байєса.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання підручника: Григорків В. С. та ін. «Оптимізаційні методи та моделі», 2-ге вид. — розділ «Теорія ігор» та матеріалів з курсу лекцій
- Розв'язання 4 задач на матричні ігри та змішані стратегії
- Підготовка аналітичної записки: «Застосування теорії ігор у задачах прийняття управлінських рішень та конкурентного аналізу»
- Опрацювання основ стохастичного програмування за онлайн-ресурсами (Khan Academy, MIT OpenCourseWare)

Очікуваний результат: студент вміє розв'язувати матричні ігри в чистих та змішаних стратегіях, зводити гру до задачі ЛП, та застосовувати критерії прийняття рішень в умовах невизначеності.

Застосування оптимізації в управлінських ІС та фінансах

Тема 4.1

Оптимізаційні задачі у фінансових ІС: оптимізація кредитного портфеля банку, задачі мінімізації ризику, оптимальне управління грошовими потоками та бюджетування.

Тема 4.2

Оптимізаційні задачі в обліку та аудиті: оптимізація планування аудиторських перевірок, задачі мінімізації витрат у бухгалтерському обліку, оптимальні схеми оподаткування.

Тема 4.3

Комп'ютерна реалізація оптимізаційних задач. Огляд та застосування сучасних програмних засобів: Excel Solver, Python (PuLP, scipy, cvxpy), MATLAB Optimization Toolbox.

Тема 4.4

Комплексний проект з оптимізації. Постановка, формалізація, розв'язання та презентація прикладної оптимізаційної задачі у сфері фінансів, банківської справи або обліку.

Тема 4.1 — Лекційний матеріал

Оптимізаційні задачі у фінансових ІС

Лекція 17–18 (4 год.): Оптимізація в банківській справі та фінансах. Задача оптимізації кредитного портфеля: максимізація дохідності при обмеженнях на ризик і структуру портфеля (задача ЛП/ЦЛП). Управління ліквідністю банку: задача оптимального розміщення активів. Задача оптимального бюджетування: розподіл бюджету між підрозділами (задача ЛП). Оптимізація страхових тарифів та резервів.

Управління грошовими потоками: моделі управління залишком грошових коштів (модель Баумоля, модель Міллера-Орра). Постановка задачі оптимального управління платіжним календарем як задачі ЛП.

Ключові питання лекції

- Оптимізація кредитного портфеля: цільова функція, обмеження, змінні рішення
- Задача оптимального розподілу активів банку між категоріями інвестицій
- Бюджетування як задача ЛП: змінні, обмеження, критерій оптимальності
- Моделі управління залишком грошових коштів: Баумоля та Міллера-Орра
- Оптимізація структури страхових виплат та формування резервів
- Інтеграція оптимізаційних моделей у фінансові ІС

Тема 4.1 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Задача 1. Оптимізація кредитного портфеля умовного банку: побудова та розв'язання задачі ЛП (максимізація відсоткового доходу при обмеженнях ризику, нормативах НБУ та структурних обмеженнях) в Excel Solver.

Задача 2. Задача бюджетування: оптимальний розподіл бюджету між IT-підрозділами компанії для максимізації ефективності. Формалізація та розв'язання як задачі ЛП.

Задача 3. Застосування моделі Баумоля для визначення оптимального залишку готівки. Порівняння з фактичними даними умовного підприємства.

Самостійна робота (6 год.)

- Опрацювання матеріалів лекції та рекомендованих джерел з оптимізації у фінансових системах
- Підготовка аналітичної записки: «Застосування лінійного програмування для оптимізації кредитного портфеля комерційного банку» (2–3 сторінки)
- Пошук та аналіз нормативів НБУ щодо обмежень кредитного ризику (bank.gov.ua)
- Розв'язання 3 задач з фінансової оптимізації засобами Excel Solver та Python

Очікуваний результат: студент вміє формалізувати та розв'язувати оптимізаційні задачі у сфері фінансового управління, банківської справи та бюджетування.

Тема 4.2 — Лекційний матеріал

Оптимізаційні задачі в обліку, аудиті та оподаткуванні

Лекція 19 (2 год.): Оптимізаційні задачі в бухгалтерському обліку та аудиті. Задача оптимального планування аудиторських перевірок: розподіл часу аудиторів між об'єктами перевірки (задача про призначення / ТЗ). Мінімізація витрат облікового процесу. Оптимізація схем нарахування амортизації для мінімізації податкового навантаження.

Задачі оподаткування: вибір оптимальної системи оподаткування для суб'єктів господарювання (задача булевого програмування). Оптимізація розподілу витрат між підрозділами для мінімізації оподатковуваного прибутку. Балансові рівняння та лінійне програмування у фінансовому обліку.

Ключові питання лекції

- Задача розподілу аудиторів як задача призначення або ТЗ
- Мінімізація витрат облікового процесу: постановка та модель
- Оптимізація методу амортизації: вплив на грошові потоки та податок
- Вибір системи оподаткування: формалізація як задача ЦЛП
- Балансова рівновага та ЛП у консолідованому обліку
- Застосування Excel Solver у задачах управлінського обліку

Тема 4.2 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Завдання 1. Задача планування аудиторських перевірок: розподіл 4 аудиторів між 4 об'єктами перевірки методом угорського алгоритму для мінімізації сукупних витрат часу. Перевірка в Excel.

Завдання 2. Вибір оптимального методу амортизації: розрахунок сум амортизації трьома методами, обчислення податкового ефекту, вибір методу, що мінімізує поточну вартість податкових платежів.

Завдання 3. Кейс: вибір оптимальної системи оподаткування для умовного малого підприємства (загальна vs. спрощена) як задача бінарного програмування. Формалізація та розв'язання.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання Податкового кодексу України: огляд систем оподаткування (zakon.rada.gov.ua)
- Підготовка аналітичної записки: «Оптимізація податкового навантаження: методи та обмеження» (2–3 сторінки)
- Розв'язання 3 задач на оптимізацію в управлінському обліку: розподіл витрат, вибір методу обліку запасів (FIFO/середньозважених) за критерієм мінімізації витрат
- Ознайомлення з нормативною базою: Закон України «Про бухгалтерський облік та фінансову звітність в Україні»

Очікуваний результат: студент вміє формалізувати та розв'язувати оптимізаційні задачі у сфері бухгалтерського обліку, аудиту та оподаткування із застосуванням методів математичного програмування.

Тема 4.3 — Лекційний матеріал

Комп'ютерна реалізація оптимізаційних задач

Лекція 20 (2 год.): Огляд програмного забезпечення для розв'язання оптимізаційних задач. **Excel Solver:** методи GRG Nonlinear, Simplex LP, Evolutionary; формування моделі, аналіз звітів. **Python:** бібліотека PuLP (задачі ЛП/ЦЛП), `scipy.optimize` (безумовна та умовна нелінійна оптимізація), `cvxpy` (опукла оптимізація, задача Марковіца). **MATLAB Optimization Toolbox:** `linprog`, `intlinprog`, `fmincon` — огляд функцій та їх синтаксис.

Практичні аспекти реалізації

Порівняння пакетів за класами задач, обчислювальною ефективністю та зручністю використання. Інтеграція оптимізаційних модулів у ІС. Типові помилки при постановці задач у програмних засобах та методи їх усунення.

- Excel Solver: обмеження (15 000 змінних рішень, 200 обмежень у Simplex LP)
- PuLP: оголошення змінних, цільової функції та обмежень, виклик солвера
- `cvxpy`: визначення змінних, задача мінімізації/максимізації, `solve()`
- MATLAB: `linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)` — синтаксис виклику

Тема 4.3 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (2 год.)

Завдання 1. Розв'язання комплексної задачі ЛП та ЦЛП одночасно у трьох середовищах: Excel Solver, Python (PuLP) та MATLAB (linprog/intlinprog). Порівняння результатів та часу виконання.

Завдання 2. Задача нелінійної оптимізації (мінімізація функції витрат) у Python (scipy.optimize.minimize з різними методами: BFGS, SLSQP) та Excel Solver (GRG Nonlinear). Аналіз збіжності.

Завдання 3. Підготовка шаблону Python-скрипту для типової задачі оптимізації у фінансах (задача Марковіца або задача бюджетування) із коментарями для подальшого використання.

Самостійна робота (4 год.)

- Опрацювання документації PuLP, scipy.optimize та cvxpy (офіційні онлайн-ресурси)
- Виконання практичного завдання: реалізація 3 оптимізаційних задач на Python із різними бібліотеками
- Підготовка порівняльної таблиці «Програмні засоби вирішення задач оптимізації: можливості та обмеження»
- Ознайомлення з Google OR-Tools як хмарним рішенням для комбінаторної оптимізації

Очікуваний результат: студент вміє застосовувати Excel Solver, Python (PuLP, scipy, cvxpy) та MATLAB для розв'язання задач лінійної, цілочислової та нелінійної оптимізації.

Тема 4.4 — Комплексний проект

Прикладна оптимізаційна задача у фінансах або обліку

Лекція 21 (2 год.): Методологія розв'язання прикладних оптимізаційних задач: етапи постановки задачі, збір та аналіз даних, вибір методу оптимізації, комп'ютерна реалізація, аналіз і верифікація результатів, прийняття управлінського рішення.

Огляд прикладних задач: оптимізація структури капіталу підприємства, мінімізація транзакційних витрат платіжної системи, оптимальне планування податкових платежів, задача оптимального розподілу коштів страхового резерву. Критерії вибору методу залежно від структури задачі.

Вимоги до комплексного проекту

1. Вибір прикладної задачі зі сфери фінансів, банківської справи, страхування або обліку
2. Формалізація задачі: опис змінних, цільової функції та обмежень
3. Обґрунтування вибору методу оптимізації
4. Комп'ютерна реалізація (Excel Solver або Python)
5. Аналіз чутливості або аналіз сценаріїв
6. Інтерпретація результатів та управлінські рекомендації
7. Презентація (10–12 слайдів) та захист (5–7 хвилин)

Тема 4.4 — Практичне заняття та СРС

Практичне заняття (4 год.)

Завдання 1. Робота над індивідуальним комплексним проектом: консультації з викладачем щодо постановки задачі, підбір та аналіз вихідних даних, формалізація математичної моделі.

Завдання 2. Комп'ютерна реалізація задачі проекту та отримання оптимального рішення. Аналіз чутливості та сценарний аналіз.

Завдання 3. Презентація та захист комплексного проекту: доповідь (5–7 хв.), відповіді на запитання, взаємооцінювання за критеріями (постановка, метод, реалізація, інтерпретація).

Самостійна робота (5 год.)

- Остаточна підготовка комплексного проекту: доопрацювання моделі, верифікація результатів, оформлення пояснювальної записки
- Підготовка презентації проекту (10–12 слайдів у Gamma або PowerPoint)
- Систематизація матеріалу всього курсу для підготовки до іспиту: повторення формул, алгоритмів та ключових методів
- Виконання тренувальних тестових завдань за всіма модулями курсу

Очікуваний результат: студент вміє самостійно ставити та розв'язувати прикладну оптимізаційну задачу у предметній галузі, інтерпретувати результати та представляти їх у вигляді управлінських рекомендацій.

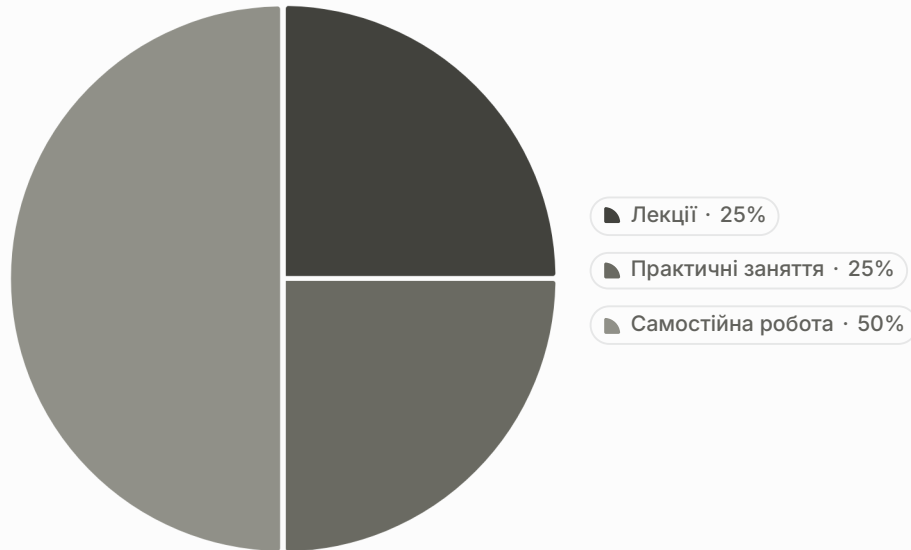
Розподіл навчального часу – 120 годин

Модуль	Тема	Лекції (год.)	Практичні (год.)	СРС (год.)
Модуль 1	Тема 1.1 – Основи оптимізації	4	2	6
	Тема 1.2 – Лінійне програмування	4	2	6
	Тема 1.3 – Двоїстість та аналіз чутливості	2	2	4
Модуль 2	Тема 2.1 – Транспортна задача	4	2	6
	Тема 2.2 – Мережеві моделі	2	2	4
	Тема 2.3 – Цілочислове програмування	4	2	6
	Тема 2.4 – Комбінаторна оптимізація	2	2	4
Модуль 3	Тема 3.1 – Нелінійна безумовна оптимізація	4	2	6
	Тема 3.2 – Умовна оптимізація, ККТ	2	2	4
	Тема 3.3 – Динамічне програмування	2	2	4
	Тема 3.4 – Стохастика та теорія ігор	2	2	4
Модуль 4	Тема 4.1 – Оптимізація у фінансових ІС	4	2	6
	Тема 4.2 – Оптимізація в обліку та аудиті	2	2	4
	Тема 4.3 – Комп'ютерна реалізація	2	2	4
	Тема 4.4 – Комплексний проект	2	4	5
Разом		30	30	60



Загальний обсяг: **120 годин = 4 кредити ЄКТС**. Підсумковий контроль – іспит. Розподіл є орієнтовним і може коригуватися відповідно до специфіки навчального процесу.

Структура навчального часу



Коментар до розподілу

Загальний обсяг — **120 годин (4 кредити ЄКТС)** — розподілено між трьома формами роботи для забезпечення балансу між теорією та практикою оптимізаційних методів.

Лекції — 30 год. (25%)

Системне подання теоретичного матеріалу: математичний апарат, алгоритми методів, доведення ключових теорем, прикладні приклади.

Практичні — 30 год. (25%)

Відпрацювання навичок розв'язання задач вручну та засобами програмного забезпечення, аналіз кейсів, комплексний проект.

Самостійна робота — 60 год. (50%)

Поглиблене вивчення, виконання розрахункових та аналітичних завдань, підготовка комплексного проекту. Становить **50% обсягу дисципліни**.

Самостійна робота студентів — Детальний опис



Опрацювання літератури

Поглиблене вивчення теоретичного матеріалу за підручниками з оптимізаційних методів (Григорків та ін., 2022–2024), науковими статтями у фахових виданнях, онлайн-курсами (MIT OCW, Coursera). Студент конспектує ключові алгоритми, порівнює методи та виявляє їх переваги та обмеження.



Індивідуальні завдання

Виконання розрахункових завдань (симплекс-метод, транспортні задачі, ДП); аналітичних завдань (аналіз чутливості, порівняння методів); творчих завдань — есе, аналітичні записки, міні-дослідження з застосувань оптимізації у фінансах та ІС; комплексний проект.



Комп'ютерна практика

Самостійна реалізація задач оптимізації у Python (PuLP, scipy, cvxpy), Excel Solver та MATLAB. Опрацювання офіційної документації та навчальних матеріалів. Аналіз результатів обчислень та перевірка правильності постановки моделей.



Підготовка до занять та контролю

Підготовка до практичних занять (опрацювання умов задач, повторення алгоритмів); підготовка до тестувань за модулями (ключові формули, теореми); підготовка до іспиту (систематизація матеріалу, типові задачі з усіх тем курсу).

Форми контролю знань

1

Поточний контроль

Завдання: розрахункові задачі та аналітичні вправи за темами змістовного модуля. Оцінюються регулярність виконання завдань, правильність розв'язання задач та якість відповідей. Проводиться після кожної теми у формі тестування (10–15 питань) або усного опитування з розв'язанням задачі біля дошки. Формує накопичувальну оцінку протягом семестру.

2

Проміжний контроль

Комплексна розрахункова контрольна робота або захист комплексного проекту (Модуль 4), які охоплюють теми змістовних модулів: теоретичні питання, розрахункові задачі (симплекс-метод, ТЗ, ДП, НЛП), задача комп'ютерної реалізації. Оцінюються правильність, повнота та обґрунтованість. Проводиться після завершення кожного змістовного модуля.

3

Підсумковий контроль — Іспит

Іспит відповідно до навчального плану. Форма проведення — письмова (теоретичне питання + розрахункова задача + задача з комп'ютерною реалізацією). Підсумкова оцінка враховує результати поточного, проміжного та підсумкового контролю: **100-бальна система** з переведенням у національну шкалу та ЄКТС (A, B, C, D, E, FX, F).

Методи викладання

Викладання дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» поєднує класичні академічні та інтерактивні методи, що забезпечує формування не лише міцної теоретичної бази з математичного програмування, а й практичних навичок комп'ютерної реалізації, необхідних для майбутньої професійної діяльності в управлінських інформаційних системах.

Лекції

Системне подання теоретичного матеріалу: математичний апарат, алгоритми, геометрична інтерпретація, доведення ключових теорем. Використання схем, таблиць та прикладів із фінансової та IT-практики.

Практичні задачі

Розрахункові вправи за темами (симплекс-метод, ТЗ, ДП, НЛП); відпрацювання алгоритмів вручну та перевірка в програмних засобах. Розвиток навичок точного математичного розрахунку.

Комп'ютерний практикум

Реалізація задач оптимізації в Excel Solver, Python (PuLP, scipy, cvxpy) та MATLAB; аналіз звітів солвера, налагодження та верифікація моделей. Формування практичних навичок програмування.

Кейс-стаді

Аналіз реальних задач з фінансового управління, банківської справи, страхування та обліку; студенти формалізують задачу, обирають метод, розв'язують та обґрунтовують управлінські рекомендації.

Комплексний проект

Самостійна розробка та розв'язання прикладної оптимізаційної задачі у предметній галузі; захист перед аудиторією. Розвиток навичок постановки та вирішення реальних задач оптимізації.

Самостійне дослідження

Підготовка аналітичних записок, рефератів та оглядів із застосувань оптимізаційних методів; розвиток навичок самостійного пошуку, аналізу та систематизації наукової інформації.

Рекомендована література та ресурси

Підручники та навчальні посібники (2022–2024 рр.)

1

Григорків В. С., Григорків М. В., Ярошенко О. І.
Оптимізаційні методи та моделі : підручник. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. — 440 с.

2

Григорків В. С., Григорків М. В., Ярошенко О. І.
Оптимізаційні методи та моделі : підручник. 2-ге вид., випр. і доп. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2024. — 464 с.

3

Григорків В. С., Григорків М. В., Ярошенко О. І. та ін.
Оптимізаційні методи та моделі: вибрані завдання для тематичного контролю : навч. посіб. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. — 168 с.

4

Vagaská A., Gombár M.
Optimization Methods in Mathematical Modeling of Technological Processes. — Springer, Mathematical Engineering Series, 2024. — ISBN 978-3-031-35341-3.

5

Кудінова А. В., Кулага І. В., Лопух К. В.
Основи економічних знань : навч. посіб. — Київ : ВЦ «Академія», 2023. — 208 с. (Методи прийняття рішень та оптимізація в ІС).

6

Непран А. В., Шевченко І. Ю. (ред.)
Економіка підприємства : підручник. У 3 т. — Харків : Вид-во Іванченка І. С., 2024. (Розділ «Оптимізаційні методи в управлінні підприємством»).

7

Kumar Y., Dixit P., Srivastava A., Sahoo R.
Investigating Optimization Methods in Computer Science Engineering: A Comprehensive Study. In: Lecture Notes in Networks and Systems, vol 918. — Springer, Singapore, 2024.

8

Єршова О. О., Гончаренко І. М.
Сучасні моделі управління розвитком бізнесу. Журнал стратегічних економічних досліджень. — 2022. — № 2(7). — С. 75. (Застосування оптимізаційних моделей).

9

Ющичина Л. О.
Управління ресурсами та витратами: курс лекцій. — Луцьк : ВНУ ім. Лесі Українки, 2022. — 103 с. (Оптимізація витрат і ресурсів).

10

Стойко О. Я., Дема Д. І.
Фінанси : підручник. — Житомир : Університет «Полісся», 2024. — 317 с. (Оптимізація фінансових рішень).

Нормативно-правова база

- Податковий кодекс України
zakon.rada.gov.ua/laws/show/2755-17
- Закон «Про бухгалтерський облік та фінансову звітність»
zakon.rada.gov.ua/laws/show/996-14
- Нормативні акти НБУ
bank.gov.ua

Офіційні ресурси та онлайн-платформи

MIT
OpenCourseWare
— Optimization
ocw.mit.edu

Python PuLP
документація
coin-or.github.io/pulp

cvxpy
документація
cvxpy.org

Верховна Рада
України
zakon.rada.gov.ua

Національний
банк України
bank.gov.ua

Журнал
«Економіка та
суспільство»
economyandsociety.in.ua

Google OR-Tools
developers.google.com/optimization

Додаток 1. Рекомендована література та ресурси | 10